Informatica teorica/ Compitino dell'11 maggio 2016/ SOLUZIONI

Esercizio 1)

Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{N}$. Rispondere alle seguenti domande e giustificare la risposta. (\B indica l'insieme complementare di B)

1.1) Se sia A sia B sono decidibili, lo è anche $A \cap B$?

Se un insieme A è decidibile, vuol dire che la sua funzione caratteristica f_A è computabile. In questo caso abbiamo che sia f_A sia f_B sono computabili.

La funzione caratteristica dell'intersezione dei due insiemi $f_{A \cap B}$ è tale che $f_{A \cap B}(x) = 0$ quando sia $f_A(x)$ sia $f_B(x)$ sono uguali a 0 (cioè x appartiene sia ad A sia a B), e $f_{A \cap B}(x) = 1$ quando $f_A(x)$ o $f_B(x)$ o entrambi sono uguali a 1 (cioè x non appartiene a uno dei due insiemi). Il calcolo di $f_{A \cap B}(x)$ a partire da $f_A(x)$ e $f_B(x)$ (che sappiamo essere computabili) è algoritmico, quindi anche $f_{A \cap B}(x)$ è computabile, ossia $A \cap B$ è decidibile.

1.2) Se A è decidibile e B solo semidecidibile, $A \cap B$ è decidibile?

Se B è solo semidecidibile, vuol dire che, se x appartiene a B, riusciamo ad ottenere $f_B(x)=0$ in tempo finito, mentre se x non appartiene a B, non riusciamo ad computare $f_B(x)=1$. Quando x appartiene sia ad A sia a B, otteniamo sia $f_A(x)=0$ sia $f_B(x)=0$ in tempi finiti perché A è decidibile e B è semidecidibile, quindi sappiamo che $A \cap B$ è almeno semidecidibile. Purtroppo, se x non appartiene a $A \cap B$, se è perché x non appartiene ad A, riusciamo ad avere $f_A(x)=1$ in tempi finiti, ma se è perché x non appartiene a B, allora non avremo in tempi finiti $f_B(x)=1$, quindi $A \cap B$ non è in generale decidibile, dal momento che la sua funzione caratteristica $f_{A \cap B}$ non restituisce in tempi finiti 0 o 1 per ogni input. L'unico caso in cui $A \cap B$ è decidibile è quando B è vuoto $\varnothing$, perché allora $A \cap B = \varnothing$, che è banalmente decidibile ($f_{\varnothing}(x) \equiv 1$).

1.3) Se sia A sia B sono semidecidibili, ma nessuno dei due è decidibile, $A \cup B$ è semidecidibile?

Sì: perché $A \cup B$ sia semidecidibile, la sua funzione caratteristica $f_{A \cup B}$ deve dare output 0 in tempi finiti per ogni input x che appartenga ad A o a B (o entrambi). Lanciando il calcolo sia di $f_A(x)$ sia di $f_B(x)$, la prima delle due che termina fornendo 0 garantisce anche che $f_{A \cup B}(x)$ valga 0. Se nessuna delle due funzione restituisce un risultato (perché x non appartiene né ad A né a B), il calcolo di $f_{A \cup B}(x)$ non termina in tempi finiti.

1.4) Se A è decidibile e B solo semidecidibile, $A \cap \backslash B$ è decidibile?

Come detto prima, se B è solo semidecidibile, vuol dire che, se x appartiene a B, riusciamo ad ottenere $f_B(x)=0$ in tempo finito, mentre non otteniamo risposta se x non appartiene a B, ovvero x appartiene a \B. Dal momento che per la decidibilità di $A \cap \backslash B$ devo avere una risposta in tempi finiti in entrambi i casi ($f_{A \cap \backslash B}(x)=0$ e $f_{A \cap \backslash B}(x)=1$), ma visto che se x appartiene a \B non abbiamo risposta, allora $f_{A \cap \backslash B}$ non è computabile e quindi $A \cap \backslash B$ non è in generale decidibile. L'unica eccezione si ha quando $B = \varnothing$, ossia $\backslash B = \mathbb{N}$, e quindi $A \cap \backslash B = A$, che è decidibile.

1.5) Se A è semidecidibile ma non decidibile e B è decidibile, $\backslash B - A$ è semidecidibile?

Perché $\backslash B - A$ sia semidecidibile, dobbiamo poter avere una risposta positiva $f_{\backslash B - A}(x)=0$ in tempi finiti quando x appartiene a $\backslash B - A$. x appartiene a $\backslash B - A$ quando appartiene a \B ma non ad A, ovvero appartiene a $\backslash B \cap \backslash A$. Essendo B decidibile, per un teorema visto a lezione, anche \B lo è, quindi $f_{\backslash B}(x)=0$ è ottenibile in tempi finiti. Il fatto che A sia semidecidibile vuole dire che avremo $f_A(x)=0$ (cioè $f_{\backslash A}(x)=1- f_A(x) = 1$) in tempi finiti, mentre a noi servirebbe avere $f_{\backslash A}(x)=0$ in tempi finiti. Perciò, in generale \B–A non è semidecidibile, a meno che A non sia vuoto, e allora \B–A = \B, e quindi è decidibile, e quindi anche semidecidibile.

Esercizio 2)

2.1) Illustrare il concetto di dimostrazione per assurdo.
2.2) Enunciare il teorema di Cantor.
2.3) Dimostrare il teorema di Cantor.

Cfr. libro di testo

Esercizio 3)

Scrivere la tavola di una macchina di Turing che computa la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se\ x = y \\ \perp & altrimenti \end{cases}$$

Una coppia di numeri (x,y) viene codificata sul nasto con x+1 e y+1 barre (I) consecutive, separate tra loro da una cella vuota (s_0).

q1	I	s0	D	qdx1
qdx1	I	I	D	qdx1
qdx1	s0	s0	D	qchk
qchk	s0	s0	D	qloop
qchk	I	I	D	qdx2
qdx2	I	I	D	qdx2
qdx2	s0	s0	S	qc1
qc1	I	s0	S	qsin1
qsin1	I	I	S	qsin1
qsin1	s0	s0	S	qchk1
qchk1	I	I	S	qsin2
qsin2	I	I	S	qsin2
qsin2	s0	s0	D	q1
qchk1	s0	s0	D	qchk2
qchk2	s0	s0	D	qchk3
qchk3	I	I	D	qloop
qchk3	s0	I	C	q0
qloop	I	I	D	qloop
qloop	s0	s0	D	qloop